$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{1-\frac{y^2}{(x+1)^2}}{1+\frac{y^2}{(x+1)^2}} = \frac{x^2+2x+1-y^2}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{2x(x+1)}{2(x+1)} = x$$

g est une injection continue $S \to \mathbb{R}$

Soit $g = \operatorname{Arg} \circ f$

$g(S) = [a, b]$ (f ②)

Poincaré : g est un homéo, Absurde

X Convexité

A) Enveloppe convexe

Données : E $\mathbb{R}$-ev n ; A une partie de E

Déf : L'enveloppe convexe de A est $\bigcap\limits_{C \text{ convexe} \supset A} C$

Lemme : Si C est une partie convexe de E, on a

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_p) \in C^p \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in C$$

D/ Récurrence sur p, $p=2$: définition

$p \geq 3$ on suppose SNG $\lambda_p \in]0,1[$, alors

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = (1-\lambda_p)\Big(\sum_{i=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}}_{\mu_i} x_i\Big) + \lambda_p x_p$$

Par (HR) $\sum_{i=1}^{p-1} \mu_i x_i \in C$

d'où $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \in C$.

Th 1) $\Gamma(A)$ est le plus petit convexe de E contenant A

2) $\Gamma(A) = \{x \in E \mid \exists p \in \mathbb{N}^* \ \exists (x_1, \dots, x_p) \in A^p \ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tq $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\}$

D/ 1) $\Gamma(A)$ est convexe par intersection, et c'est le plus petit par construction

2) Avec le lemme : $A \subset \underbrace{\Gamma(A)}_{\text{convexe}} \Rightarrow B \subset \Gamma(A)$

Pour obtenir $B \supset \Gamma(A)$ (?), on va prouver que B est convexe (?)

Soit $x = \sum_1^p \lambda_i x_i \in B$

$y = \sum_1^p \mu_i y_i \in B$

$\lambda \in [0,1]$

alors $\lambda x + (1-\lambda) y = \sum_1^p \lambda \lambda_i x_i + \sum_1^p (1-\lambda) \mu_j y_j$ est de la forme convenable

Pour $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in A^{p+q}$

$$\underbrace{(\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_p, (1-\lambda)\mu_1, \dots, (1-\lambda)\mu_q)}_{\text{somme } 1} \in \mathbb{R}_+^{p+q}$$

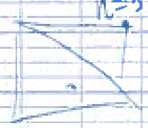
Exercice :

① On suppose E de dim finie égale à d, soit $p \geq d+2$ et $a_0, \dots, a_p \in E$. Il existe alors des nombres $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^p \alpha_k a_k = 0$ et $\sum_{k=0}^p \alpha_k = 0$

On change d'origine $x_k = a_k - a_0$, $k = 1, \dots, p$

Alors $(x_1, \dots, x_p)$ est liée donc $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

tq $(\alpha_i) \neq (0)$ et $\sum_{k=1}^p \alpha_k x_k = 0$. Soit $\underbrace{-\left(\sum_{k=1}^p \alpha_k\right)}_{\alpha_0} a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p$

Ex : Plan 

chalKal

② (Carathéodory) Soit $p \geq d+1$, $a_0, \dots, a_p \in E$, $b = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i$
avec $\lambda_0 + \dots + \lambda_p = 1$, $\lambda_i \geq 0$

Alors : $\exists j \in [\![0,p]\!]$ $b = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p} \mu_k a_k$, $\mu_k \geq 0$, $\sum \mu_k = 1$

D/ On utilise les (α_k) du ①. On envisage $\nu_k = \lambda_k + \tau \alpha_k$
(chaque ν_k est fct affine de τ)

Obs $\sum_{k=0}^{p} \nu_k a_k = \sum_0^p \lambda_k a_k + \tau \cancel{\sum \alpha_k a_k} = b$ | $\sum_0^p \nu_k = \sum_0^p \lambda_k + \tau \sum_0^p \alpha_k = 1$

On regarde $A_k = \{\tau \mid \nu_k(\tau) \geq 0\}$ $A_k \neq \emptyset$ car $0 \in A_k$
A_k est fermé dans $\mathbb{R}$

Si $\alpha_k > 0$ $A_k = \left[-\frac{\lambda_k}{\alpha_k}, +\infty\right[$, si $\alpha_k < 0$, $A_k = \left]-\infty, -\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\right]$ | $\alpha_k = 0$

$S = \bigcap A_k$, $(\alpha_k) \neq 0$ et $\sum \alpha_k = 0$ | $\exists k, \alpha_k > 0$
$\exists l, \alpha_l < 0$

S est un segment qui contient 0.

Bilan : $\tau_0 \in S$, donc $\forall k$, $\underbrace{\nu_k(\tau_0)}_{\mu_k} \geq 0$ et $\mu_j = 0$

donc $b = \sum_{k=0}^{p} \mu_k a_k$ ($\mu_j = 0$)

Compacité

③ Soit K une partie de E, dim E = d, alors $\Gamma(K)$ un compact

S/ On note $\Lambda = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1} \mid \lambda_0 + \dots + \lambda_d = 1\}$

Λ est fermé, borné DF donc compact

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^{d+1} \times \Lambda & \longrightarrow & \Gamma(K) \\ ((v_i), (\lambda_i)) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i \end{array}$$

d'après ② φ est surjective.

J'aime les frites = jaimelesfrites.000webhostapp.com

moi aussi

fait → B) Projection et séparation

Exercice ① Soit C un convexe de l'ev euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ non vide et fermé

a) Pour tout $a \in E$, il existe, et de façon unique $b \in C$ tq

$d(a, C) = \|a-b\|_2$

b) $\forall x \in C, \langle a-b, x-b\rangle \leq 0$

c) On pose $b = p(a)$, alors p est 1-lip

D/ ① existence → optimisation (cf Math 1 à partir de p 7)

Unicité : $\|a-b\| = \|a-b'\| = d(a, C)$ où $b, b' \in C$

Médiane : $\underbrace{\|a-b\|^2}_{d(a,C)^2} + \underbrace{\|a-b'\|^2}_{d(a,C)^2} = 2\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2\right)$

$= 2\left\|a - \frac{b+b'}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|b-b'\|^2$

$\geq 2d(a,C)^2 + \frac{1}{2}\|b-b'\|^2$ ainsi donc $b = b'$

b. Soit $x_t = tx + (1-t)b$, $t \in [0,1]$

il vient $x_t \in C$, donc $\|a-x_t\|^2 \geq \|a-b\|^2$

d'où $\|t(a-x) + (1-t)(a-b)\|^2 \geq \|a-b\|^2$

$t^2\|a-x\|^2 + (t^2-2t+1)\|a-b\|^2$

$+ 2t(1-t)\langle a-x, a-b\rangle \geq \|a-b\|^2$

~~$\|a-x_t\|^2 \geq \|a-b\|^2$ d'où~~

$t\|a-x\|^2 + (t-2)\|a-b\|^2 + 2(1-t)\langle a-x, a-b\rangle \geq 0$

$t \to 0$, $\langle a-x, a-b\rangle \geq \|a-b\|^2$

D'où $\langle a-b+b-x, a-b\rangle \geq \|a-b\|^2$ donc $\langle a-b, x-b\rangle \leq 0$

ⓒ Soient $a, a' \in E$, $b = p_C(a)$, $b' = p_C(a')$

il vient $\langle a-b, b'-b \rangle \leq 0$

$\langle a'-b', b-b' \rangle \leq 0$

$\iff \langle b'-a', b'-b \rangle \leq 0$

on somme : $\langle a-a'+b'-b, b'-b \rangle \leq 0$

$\|b'-b\|^2 \leq \langle a'-a, b'-b \rangle \underset{CS}{\leq} \|a'-a\| \cancel{\|b'-b\|}$

donc $\|b-b'\| \leq \|a-a'\|$

② Séparation

A hypothèses. Si $a \notin C$, il existe un hyperplan affine de E qui sépare strictement a de C

S/ Hyperplan affine $\langle u | z \rangle = cste$, u fixé $\neq 0$

(si $\langle u | z_0 \rangle = cste$, $z \in H \iff \langle u | z - z_0 \rangle = 0$

$\iff z \in z_0 + \{u\}^\perp$)

Séparation stricte $\langle u | a \rangle > \gamma$

$\forall x \in C$, $\langle u | x \rangle < \gamma$

On note $b = P_C(a)$, $u = a-b$, $c = \frac{a+b}{2}$

Rappel : $\forall x \in C$ $\langle a-x, a-b \rangle \geq \|a-b\|^2$

On regarde l'hyperplan $\perp u$, passant par c

$\langle a-c, a-b \rangle = \langle \frac{a-b}{2}, a-b \rangle = \frac{1}{2} \|a-b\|^2$

Si $x \in C$ $\langle a-x, a-b \rangle \geq \|a-b\|^2$

$\langle a-c+c-x, a-b \rangle \geq \|a-b\|^2$

$\langle c-x, a-b \rangle \geq \frac{1}{2} \|a-b\|^2$

$\langle x-c, u \rangle \leq -\frac{1}{2} \|a-b\|^2$

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \left\{ \mathfrak{z} - C, u \right\rangle \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi(a) > 0 \\ \forall x \in C \quad \varphi(x) < 0 \end{array}$$